

Bayesian规则下的Go/Nogo概率

Chao Cheng

2023 年 7 月 20 日

目录

1	引言	1
2	数据似然	2
3	先验和后验分布	2
4	操作特性的计算	3
4.1	理论计算	3
4.2	考虑data cutoff的OC计算	4

1 引言

事件时间 $T_e \sim Exp(\lambda_1)$, $f(t; \lambda_1) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t)$, 删失时间 $T_c \sim Exp(\lambda_2)$, $f(t; \lambda_2) = \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)$. 则观察到的数据的联合密度/质量

$$f(t, \delta) = \begin{cases} \lambda_1 \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) & \delta = 1 \\ \lambda_2 \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) & \delta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\delta = 1$ 表示观察到事件, $\delta = 0$ 表示观察到删失。

2 数据似然

记实际观察到的数据为 (T, δ) , 其中 $T = \min(T_e, T_c)$; $\delta = 1$ 表示观察到事件, $\delta = 0$ 表示观察到删失。那么对于i.i.d.样本 (t_i, δ_i) , $i = 1, \dots, n$, 数据的likelihood为

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2; Data) &= \prod_{i=1}^n f(t_i, \delta_i) \\ &= \lambda_1^{\sum_{i=1}^n \delta_i} \lambda_2^{n - \sum_{i=1}^n \delta_i} \exp\left(-(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{i=1}^n t_i\right) \\ &= \lambda_1^{\sum_{i=1}^n \delta_i} \exp\left(-\lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i\right) \cdot \lambda_2^{n - \sum_{i=1}^n \delta_i} \exp\left(-\lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i\right) \end{aligned} \quad (2)$$

从(2)中可以看出最大化likelihood时, λ_1 和 λ_2 相互独立。若要关于 λ_1 来最大化likelihood, 只需要最大化

$$\lambda_1^{\sum_{i=1}^n \delta_i} \exp\left(-\lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i\right)$$

若要关于 λ_2 来最大化likelihood, 只需要最大化

$$\lambda_2^{n - \sum_{i=1}^n \delta_i} \exp\left(-\lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i\right)$$

因此MLE分别是

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n t_i}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{n - \sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

3 先验和后验分布

一般对 λ 采用共轭先验 $Gamma(\alpha, \beta)$ 分布, 密度为

$$\pi(\lambda | \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) \quad (3)$$

取决于参数的定义和记号的设置, 有时会采用Inverse-Gamma分布, 或参数 β 设置为 $1/\beta$, 因此在实际使用中, 请确认到底使用的何种形式的密度和先验。本文档中的写法, α 和 β 对应着R中`dgamma`函数中的`shape`和`rate`参数。

结合(2)和(3)可知, λ_1 的后验分布核心为

$$f(\lambda_1 | Data) \propto \lambda_1^{\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i - 1} \exp\left(-\left(\beta + \sum_{i=1}^n t_i\right) \lambda_1\right),$$

因此 λ_1 的后验分布为 $Gamma(\alpha + \sum \delta_i, \beta + \sum t_i)$ 。

同理, λ_2 的后验分布为 $Gamma(\alpha + n - \sum \delta_i, \beta + \sum t_i)$ 。

4 操作特性的计算

4.1 理论计算

观察到事件的概率：

$$P(\delta = 1) = \int_0^\infty f(t, \delta = 1) dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

那么观察时间的条件分布

$$P(T \leq t | \delta) = \frac{P(T \leq t, \delta)}{P(\delta)} = \begin{cases} \frac{P(T \leq t, \delta = 1)}{P(\delta = 1)} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) & \text{if } \delta = 1 \\ \frac{P(T \leq t, \delta = 0)}{P(\delta = 0)} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) & \text{if } \delta = 0 \end{cases}$$

可见该条件分布与 δ 取值无关，因此 T 与 δ 独立。（一般这样的结论是不会成立的，这里依赖于两者都是指数分布）。

由此可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n T_i &\sim \text{Gamma}(n, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \sum_{i=1}^n \delta_i &\sim \text{Binomial}(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}) \end{aligned}$$

且 $\sum_{i=1}^n T_i$ 和 $\sum_{i=1}^n \delta_i$ 独立。

在Bayesian角度下，风险的后验分布服从 $\text{Gamma}\left(\text{prior_shape} + \sum_{i=1}^n \delta_i, \text{prior_rate} + \sum_{i=1}^n T_i\right)$ 对于给出某一个Go/Nogo的规则，例如 $P(\lambda < \text{eff_cut}) \geq \text{go_prob}$ 后，我们可以将其转化为在所有可能的观察到的事件数的情况下，需要的总观察时间的要求，因此某一个潜在的风险 λ_1 给出Go信号的概率为

$$\begin{aligned} &P(\text{Declare Go}) \\ &= \sum_{evt_{num}=0}^n P\left(\text{Declare Go}, \sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right) \\ &= \sum_{evt_{num}=0}^n P\left(\text{Declare Go} \middle| \sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right) P\left(\sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right) \\ &= \sum_{evt_{num}=0}^n P\left(\sum_{i=1}^n T_i \geq t_{\text{eff cut for evt}_{num}} \middle| \sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right) P\left(\sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right) \\ &= \sum_{evt_{num}=0}^n P\left(\sum_{i=1}^n T_i \geq t_{\text{eff cut for evt}_{num}}\right) P\left(\sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right). \end{aligned}$$

同理我们可以算出某个 λ_1 给出Nogo信号的概率为

$$P(\text{Declare Nogo}) = \sum_{evt_{num}=0}^n P\left(\sum_{i=1}^n T_i \leq t_{\text{fut cut for evt}_{num}}\right) P\left(\sum_{i=0}^n \delta_i = evt_{num}\right).$$

4.2 考虑data cutoff的OC计算

待添加，当前基于模拟计算。